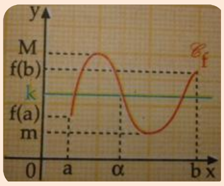
مبرهنة إذا كانت f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$
فإن لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عدد حقيقي α من $[a;b]$ بحيث : $f(\alpha)=k$

التفسير الهندسي



البرهان

نفترض أن : $f(a)\leq f(b)$

f متصلة على $[a;b]$ $\Leftarrow$ $f([a;b])=[m;M]$ (خاصية)

(m قيمة دنوية للدالة على $[a;b]$) (M قيمة قصوية للدالة على $[a;b]$)

بما أن : $\begin{cases} m\leq f(a)\leq M \\ m\leq f(b)\leq M \end{cases}$ فإن : $[f(a);f(b)]\subset[m;M]$ أي : $[f(a);f(b)]\subset f([a;b])$

إذن : $f(\alpha)=k$ $k\in[f(a);f(b)]\Rightarrow k\in f([a;b])\Rightarrow \exists\alpha\in[a;b]:$

نتيجة 1 إذا كانت : ❶ f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$ ❷ $f(a).f(b)\prec 0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في المجال $[a;b]$

مـــــــــثال :

سؤال : بين أن المعادلة $x^3-2x^2-1=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[2;3]$

طريقة تحرير الجواب :

- نعتبر الدالة $f:x\mapsto x^3-2x^2-1$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و بالخصوص على $[2;3]$
- لدينا $f(2)=-1$ و $f(3)=8$ إذن $f(2)\times f(3)\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $f(\alpha)=0$ $\exists\alpha\in]2;3[:$

نتيجة 2 إذا كانت : ❶ f دالة متصلة ❷ رتيبة قطعا على $[a;b]$ ❸ $f(a).f(b)\prec 0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاوحيدا في المجال $]a;b[$

تمرين 01 : بين أن كلا من المعادلات التالية تقبل حلا على الأقل في المجال I :

$x^4+x^2-9=0 \quad , \quad I=[-2;2]$; $7x^3-x-1=0 \quad , \quad I=[0;1]$

$1+\sin(x)-x=0 \quad , \quad I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$; $\cos(x)-x=0 \quad , \quad I=\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$

$1+\sin(x)-x^2=0 \quad , \quad I=\mathbb{R}$; $x^3-3x^2+15x-7=0 \quad , \quad I=\mathbb{R}$

تمرين 02 : بين أن كلا من المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I :

$-x^3-2x+1=0 \quad , \quad I=\mathbb{R}$; $2x^3+3x-3=0 \quad , \quad I=[0;1]$

$-x^5-3x+1=0 \quad , \quad I=\mathbb{R}$; $x^3-3x^2+1=0 \quad , \quad I=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

تمرين 03 : بين أن المعادلة $4x^3-7x^2+1=0$ تقبل حلين على المجال $]-1;1[$

تمرين 04 : نعتبر الدالة العددية المعرفة كمايلي : $f(x)=\dfrac{9x^5-x-2}{x^2+1}$

بين أن منحنى الدالة f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $[0;1]$

تمرين 05 : بين أن كلا من المعادلات التالية تقبل ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$

$(E_1):\ x^3-3x^2+1=0 \quad ; \quad (E_2):\ x^3-6x^2+6=0$

تمرين 06 : بين أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا $c\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ بحيث $2c-1=\sin\left(c^2+\frac{\pi}{4}\right)$

تمرين 07 :

$f:[0;1]\to[0;1]$ دالة متصلة على $[0;1]$. بين أن f تقبل نقطة صامدة.

$f:[a;b]\to[a;b]$ دالة متصلة على $[0;1]$. بين أن f تقبل نقطة صامدة.

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة وتناقصية . بين أن f تقبل نقطة صامدة وحيدة.

تمرين 08 : لتكن $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة

1) بين أنه إذا كان $f([a;b])\subset[a;b]$ فإن f تقبل نقطة صامدة.

2) بين إنه إذا كان $[a;b]\subset f([a;b])$ فإن f تقبل نقطة صامدة.

تمرين 09: ناقش حسب قيم $\alpha\in\mathbb{R}$ عدد حلول المعادلة $\operatorname{Arctan}(2x)-\operatorname{Arctan}(x)=\alpha$

تمرين 10 : لتكن f الدالة المعرفة بمايلي : $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم
بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;\pi]$

تمرين 11 : لتكن $f:[a;b]\to[a;b]$ دالة متصلة و تزايدية . بين أن f تقبل نقطة صامدة وحيدة .

تمرين 12 : f دالة عددية معرفة ومتصلة على $[a;b]$ بين أن $2f(a)+3f(b)=5f(k)$ $\exists k\in[a;b]:$

تمرين 13 : لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ بحيث: $f(b)\geq g(b)$, $f(a)\leq g(a)$
بين أن $f(c)=g(c)$ $\exists c\in]a;b[:$

تمرين 14 : لتكن f دالة متصلة على مجال $[0;1]$
بين أنه إذاكان $-1\leq f(x)\leq 1$ لكل x من $[0;1]$ فإن $[f(c)]^2=c$ $\exists c\in[0;1]:$

تمرين 15 : لتكن f دالة معرفة من $[0;1]$ نحو $\mathbb{R}$. نفترض أن: $f(0)=f(1)$
بين أن $f(k)=f\left(k+\frac{1}{2}\right)$ $:\exists k\in\left[0;\frac{1}{2}\right]:$

تمرين 16 : لتكن $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة. بحيث : $f(0)=f(1)=0$
وليكن $f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$ $\forall x\in\left[0;\frac{7}{10}\right]:$. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلول.

تمرين 17 : لتكن $f:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$ دالة متصلة موجبة. بحيث: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l\prec 1$
بين أن $f(\alpha)=\alpha$ $\exists\alpha\in[0;+\infty[:$

تمرين 18: لتكن $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة $n\in\mathbb{N}^*$ ، $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\in[0;1]$.
بين أن $\exists x\in\mathbb{R}:\quad f(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$

تمرين 19: لتكن $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة. بحيث: $f(0)=f(1)$
بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists c\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]:\quad f\left(c+\frac{1}{n}\right)=f(c)$

تمرين 20: لتكن $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة. و $p,q\in[0;+\infty[$
بين أن $\exists c\in[a;b]:p.f(a)+q.f(b)=(p+q).f(c)$

تمرين 21: لتكن $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة. بحيث : $f(0)=f(1)$ وليكن $p\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$
بين أن $\exists x_p\in[0,1]:\quad f\left(x_p+\frac{1}{p}\right)=f(x_p)$

تمرين 22: ليكن α و β عددين موجبين قطعا و f دالة متصلة على $[0;1]$ بحيث $f(0)\neq f(1)$
بين أن $\exists c\in]0;1[:\quad \alpha f(0)+\beta f(1)=(\alpha+\beta)f(c)$

تمرين 21: لتكن f دالة متصلة على $[0;2]$. بين أن $\exists c\in]0;2[:\quad f(c)=\frac{1}{c}+\frac{1}{c-2}$

تمرين 22: لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\prec ab$ و $f(b)\succ b^2$
بين أنه يوجد عدد α بحيث $\alpha\in[a;b]$ و $f(\alpha)=\alpha b$

تمرين 23: لتكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ دالة متصلة. بحيث : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)\prec x$
1) بين أن : $f(0)=0$
2) بين أن : $\forall(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, avec\quad a\prec b,\ \exists M\in[0;1[:\quad f(x)\leq Mx$

تمرين 24: h لتكن دالة متصلة ، دورية دورها $T\succ 0$. بين أن يوجد t_0 بحيث $h(t_0)=h\left(t_0+\frac{T}{2}\right)$

تمرين 25 : لتكن f و g دالتين من $[0;1]$ نحو $[0;1]$ حيث f و g متصلتان على $[0;1]$. نفترض أن : $fog = gof$
بين أن $f(\alpha)=g(\alpha) \quad (\exists \alpha \in [0;1])$:

تمرين 26 : لتكن f دالة معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $]-\infty;1[$ و g دالة معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $]1;+\infty[$ بحيث و دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$ و يوجد عنصران x_1 و x_2 من $\mathbb{R}_+^*$ يحققان $x_1 \prec x_2$ و $f(x_1)=x_1$ و $g(x_2)=x_2$
بين أن $\exists x_3 \in]x_1;x_2[: \quad f(x_3)g(x_3)=x_3$

تمرين 27 : لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ نفترض أن : $f(x) \succ g(x)$ لكل x من $[a;b]$
بين أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا λ بحيث يكون لدينا $f(x) \geq g(x)+\lambda$ لكل x من $[a;b]$

تمرين 28 : لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)=f(b)$
بين أن المعادلة $f(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$

تمرين 29 : لتكن $f:[0;1]\to[0;1]$ دالة متصلة على مجال $[0;1]$ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists c_n \in [0;1]); \quad f(c_n)=c_n^n$

تمرين 30 : لتكن f و g دالتين متصلتين على $[0;1]$ نفترض أن : $[f(0)-g(0)]\times[f(1)-g(1)] \leq 0$
بين أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا $\lambda \in [0;1]$ بحيث $f(c)=g(c)$

تمرين 31 : ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ حيث $a \prec b$ و $ab \succ 0$. $f:[a;b]\to[a;b]$ دالة متصلة على مجال $[a;b]$
بين أن $\exists c \in]a;b[: \quad cf(c)=ab$

تمرين 32 : لتكن f دالة متصلة على مجال $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f(1)=1$ بين أن $(\exists c \in]0;1[) : f(c)=\frac{1-c}{1+c}$

تمرين 33 : لتكن f دالة معرفة من $[a;b]$ نحو $[a;b]$ بحيث : $|f(x)-f(y)| \prec |x-y| \quad \forall (x,y)\in[a;b]^2 :$
1) بين أن f متصلة على $[a;b]$ 2) بين أن f تقبل نقطة صامدة في $[a;b]$