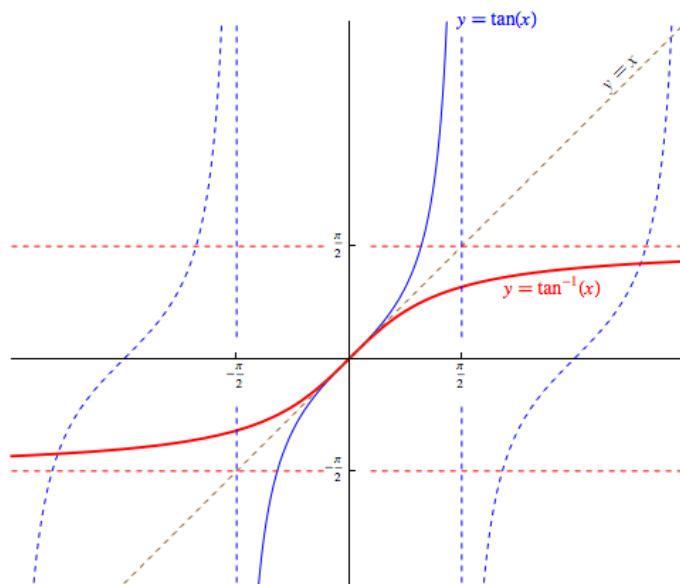


تعريف: الدالة العكسية لقصور الدالة \tan على $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ تسمى دالة القوس الظل ونرمز لها بالرمز Arctan



ننتائج

✓ الدالة Arctan معرفة من \mathbb{R} نحو $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

✓ الدالة Arctan متصلة على \mathbb{R}

✓ الدالة Arctan تزايدية قطاعا على \mathbb{R}

✓ الدالة Arctan فردية يعني $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan } x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

✓ $\text{Arctan } x = y \Leftrightarrow x = \tan y$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) $\left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$

✓ $\tan(\text{Arctan } x) = x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

✓ $\text{Arctan}(\tan x) = x$ ($\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$)

✓ $\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(y) \Leftrightarrow x = y$ ($\forall x, y \in \mathbb{R}$)

✓ $\text{Arctan}(x) < \text{Arctan}(y) \Leftrightarrow x < y$ ($\forall x, y \in \mathbb{R}$)

✓ $(\text{Arctan } x)' = \frac{x'}{1+x^2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

تمرين 01 : بسط التعبير : $f(x) = \text{Arctan}(\tan x)$ على كل من $\left] -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right[$ و $\left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$

تمرين 02 : أحسب مايلي : $C = \text{Arctan} \left[\tan \left(\frac{2009\pi}{4} \right) \right]$, $B = \tan \left(\arctan \frac{\pi}{2} \right)$, $A = \text{Arctan} \left[\tan \left(\frac{101\pi}{4} \right) \right]$
 $D = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$, $C = \arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2 + \sqrt{3})$

تمرين 03 : أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{\pi}{2} \right) , \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[2 \text{Arctan}(x) - \pi \right] , \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x^2 + 2x)}{x} , \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4}}{x-1} , \lim_{x \rightarrow -\infty} x \text{Arctan}(\sqrt{x^2 + 1} + x) , \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - x \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

تمرين 04 : بين أن :

$$\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\forall x < 0 \quad \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$$

تمرين 05 :

-1 بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

-2 أثبت المتساوية التالية : $(ab < 1) : \arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$

-3 تطبيق : أحسب $S = 2 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{13}$

تمرين 06 : حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$$(E_2) : \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4} \quad (E_1) : \arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$$

$$(E_4) : \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} \quad (E_3) : \arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$$

تمرين 07 : $(E): \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x)$

(1) بين المعادلة (E) تقبل حولا موجبة

(2) حل المعادلة (E)

تمرين 08 : ليكن $x, y \in \mathbb{R}$

(1) بين أن $y \geq 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x-y) \leq \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$

(2) بين أن $y \leq 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x-y) \geq \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$

(3) بين أن $\forall x \in \mathbb{R}: |\text{Arctan } x| = \text{Arctan}|x|$

(4) استنتج أن: $\text{Arctan}|x-y| \leq \text{Arctan}|x| + \text{Arctan}|y|$

تمرين 09 : الهدف من هذا التمرين هو البرهان على علاقة John MACHIN (1680-1751)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

(1) نضع $\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ ، حدد $\tan(2\theta)$ ثم $\tan(4\theta)$

(2) بين أن $0 \leq \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{\pi}{6}$ ثم استنتج تأطير $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$

(3) استنتج علاقة John MACHIN

تمرين 10 : لتكن f دالة معرفة على \mathbb{R} بمايلي: $f(x) = 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x)$

(1) أحسب $f(0)$

(2) أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}

(3) ماذا تستنتج ؟

تمرين 11 : نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي: $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)$

(1) حدد $f'(x)$ لكل x من D_f

(2) استنتج أن: $f(x) = \text{Arctan } x - \frac{\pi}{4}$ $\forall x \in]-1; +\infty[$

(2) استنتج أن: $f(x) = \text{Arctan } x + \frac{3\pi}{4}$ $\forall x \in]-\infty; -1[$

تمرين 12 : نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$

(1) بين أن: $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(2) ليكن x عنصر من \mathbb{R}

(a) بين أن: $1 - \tan^2 f(x) = 2x \tan f(x)$

(b) استنتج أن: $x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2f(x)\right)$

(c) استنتج أن: $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{Arctan}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

تمرين 13 : نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي: $\forall x \in]-1;1]: f(x) = 2 \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

(3) بين أن: $0 \leq f(x) < \pi$ $\forall x \in]-1;1]$

(4) ليكن x عنصر من $] -1;1]$

(d) بين أن: $1 - \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = x \left(1 + \tan^2 \frac{f(x)}{2}\right)$

(e) استنتج أن: $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$

تمرين 14 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بمايلي: $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

بين أن f ثابتة على مجالات و حدد في كل من هذه المجالات قيمة $f(x)$

تمرين 15 : (1) بين أن $x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

(2) استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x) - x}{x^3}$

تمرين 16 : نعتبر الدالة العددية f بحيث: $f_m(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x+m}{1-mx}\right)$ ($m \in \mathbb{R}^*$ بارامتر بحيث

(1) حدد $f_m'(x)$ لكل x من D_{f_m}

(2) بين أن $f_{-m}(x) = -f_m(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{m}\right\}$

ليكن $m \in \mathbb{R}_*$

$$\forall x \in \left] \frac{1}{m}, +\infty \right[\quad f_m(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(m) \quad \text{بين أن (3)}$$

$$\text{Arctan}(m) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{m}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{بين أن (4)}$$

$$\forall \left] -\infty, \frac{1}{m} \right[\quad f_m(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(m) + \pi \quad \text{استنتج أن (5)}$$

$$(\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}) \text{ حيث } (\forall x, y \in \mathbb{R})(x \neq y) \quad \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) + \varepsilon\pi \quad \text{استنتج أن (6)}$$

$$f(x) = x^3 \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right); \quad \text{تمرين 17: نعتبر الدالة العددية } f \text{ بحيث:}$$

(1) حدد D_f

(2) ادرس قابلية اشتقاق f في $x_0 = 0$

$$\forall x \in]0; 1[\quad x < \text{Arctan}(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية بين أن (3)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \leq f(x) \leq x \quad \text{استنتج أن (4)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad xf'(x) = 3f(x) - \frac{2x^5}{1+x^4} \quad \text{بين أن (5)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^2}{1+x^4} (3\sqrt{1+x^4} - 2x^2) \leq f'(x) \quad \text{استنتج أن (6)}$$

(7) أعط جدول تغيرات f

$$\begin{cases} f(x) = x \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{تمرين 18: نعتبر الدالة العددية } f \text{ بحيث:}$$

(1) ادرس اتصال وقابلية اشتقاق f في 0

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{x}{2+x^2} < \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{بين أن (3)}$$

(4) استنتج منحى تغيرات f

(5) حدد معادلة نصف مماسي f في 0

(6) أنشئ (C_f)

تمرين 19 : نعتبر الدالة العددية f بحيث $g(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$

(1) حدد D_g

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(3) ادرس قابلية اشتقاق g على يمين في $x_0 = 0$

(4) حدد $g'(x)$ لكل x من D_g

(5) أعط جدول تغيرات g

(6) بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\pi}{2}x - g(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

(7) استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_g)

(8) بين أن g تقابل من \mathbb{R}^+ نحو مجال I يجب تحديده.

(9) أنشئ (C_g) و $(C_{g^{-1}})$

تمرين 20 : I- لتكن g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بمايلي $g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$

أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بمايلي

$$\begin{cases} f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} - x; & x \geq 0 \\ f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right); & x < 0 \end{cases}$$

(1) أدرس إتصال الدالة f في $x_0 = 0$

(2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 و أول هندسيا النتيجة

(3) أعط جدول تغيرات الدالة f

(4) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

(5) أعط جدول تغيرات الدالة f

(6) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]1; +\infty[$

(7) بين أن α يحقق $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$ ثم استنتج قيمة α

(8) أنشئ المنحنى (C_f)

(9) بين أنه إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $0 < a < \alpha < b$ فإن $\frac{\frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^3}}{\frac{2}{b^3} + \frac{1}{b^3}} > \frac{a}{b}$

تمرين 21 : I- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$

نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بمايلي $h(x) = \text{Arctan } x - x + \frac{1}{3}x^3$

(a) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |h'(x)| \leq x^4$

(b) استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad |h(x) - h(0)| \leq |x|^5$

II - لتكن g الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بمايلي $g(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1} - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(1) أعط جدول تغيرات g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]-1; -\frac{1}{2}[$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \left(\text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x \right); & x \notin \{0, -1\} \\ f(0) = 0 & \& \quad f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

III - لتكن f الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بمايلي :

(1) أدرس إتصال الدالة f في $]-1; +\infty[$

(2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 وعلى اليمين في -1

(3) أعط جدول تغيرات الدالة f

(4) أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \approx -\frac{3}{4}$ و $f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$)

تمرين 22 : I - نعتبر الدالة f المعرفة $]$ 0; $+\infty[$ على بمايلي : $f(x) = 2 \text{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

(1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة

(3) أعط جدول تغيرات f

(4) أنشئ (C_f)

II - لتكن g قصور f على المجال $I =]1; +\infty[$

(1) بين أن g تقابل من $I =]1; +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

(2) حدد تعبير g^{-1} لكل x من J

(3) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]1; 2[$

III - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) بين أن : $f(2) > \frac{\pi}{3}$

(2) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 2$

(3) بإستعمال مبرهنة التزايد المتناهية بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

(4) استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

تمرين 23 : I- لتكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & ; x < -2 \\ f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{x+2}) & ; x \geq -2 \end{cases}$$

(1) أدرس إتصال الدالة f في $x_0 = -2$

(2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في $(-2)^-$

(3) بين أن $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\alpha}{\tan^2(\alpha)}$

(4) استنتج أن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في (-2)

(5) أعط جدول تغيرات الدالة f

(6) بين أن $\forall x \in]-\infty; -2[\quad f(x) - (2x+3) > 0$

(7) أنشئ المنحنى (C_f)

II- لتكن g قصور f على المجال $I =]-\infty; -2[$

(1) بين أن g تقابل من $I = [1; +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

(2) حدد تعبير g^{-1} لكل x من J

III- لتكن h قصور f على المجال $[0; 2]$

و المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Arctan}(x) \leq x$

(2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n \leq 2$

(3) بين أن المتتالية العددية (u_n) تناقصية قطعا

(4) بين أن المعادلة $h(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; 2[$

(5) بين أن $h([0; 2]) \subset [0; 2]$

(6) استنتج أن (u_n) متقاربة محمدا نهايتها

$$\begin{cases} \varphi(x) = \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) ; x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

تمرين 24 : لتكن φ الدالة المعرفة على \mathbb{R} بمايلي

- (1) أدرس إتصال الدالة φ في $x_0 = 0$
- (2) أدرس زوجية الدالة φ
- (3) بين أن φ رتيبة قطعاً على \mathbb{R}^+
- (4) بين أن φ تقابل من \mathbb{R} نحو J يجب تحديده
- (5) حدد الدالة العكسية $\varphi^{-1}(x)$ لكل x من J

$$\begin{cases} g(x) = -\sqrt[3]{1-x^3} ; x \leq 1 \\ g(x) = 2 \text{Arctan} \left(\frac{x-1}{1+x} \right) ; x > 1 \end{cases}$$

تمرين 25 : لتكن g الدالة المعرفة بمايلي :

1. حدد D_g
2. أحسب نهايات الدالة g عند محددات D_g
3. حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_g)
4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة g في 1 و أول هندسيا النتيجة
5. أعط جدول تغيرات الدالة g
6. حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_g)
7. بين أن النقطة $A(0; -1)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g)
6. بين أن g تقابل من \mathbb{R} نحو J يجب تحديده
7. حدد الدالة العكسية $g^{-1}(x)$ لكل x من J
8. أنشئ (C_g) و $(C_{g^{-1}})$

تمرين 26 I : لتكن f الدالة المعرفة بمايلي $f(x) = \text{Arctan}(\sqrt[3]{x^3+1}-x)$

1. حدد D_f
2. أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$
3. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_0 = -1$ ثم أول هندسيا النتيجة
4. أنشئ (C_f)

II - نضع $g(x) = \frac{1}{9} [\tan(f(x)) + x]^3 - 2 \text{Arctan}(x)$

1. حدد D_f

$$2. \text{ بين أن } (\forall n \in D_g) \quad g(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3+1}{3} - 2 \operatorname{Arctan}(x) \right)$$

$$3. \text{ بين أن } \exists! \varepsilon \in [-1; 1] \quad g(\varepsilon) = 0$$

$$4. \text{ بين أن } \forall x \in [-1; 1[\quad |g'(x)| \leq k \text{ حيث } k \in [0; 1[\text{ يتم تحديده}$$

$$\text{III - نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة بمايلي } \begin{cases} -1 \leq u_n \leq 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

$$1. \text{ بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n| \leq 1$$

$$2. \text{ بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \varepsilon| \leq k |u_n - \varepsilon|$$

$$3. \text{ استنتج أن } (u_n) \text{ متقاربة محددات نهايتها}$$

تمرين 27: لتكن f الدالة المعرفة بمايلي $f(x) = \operatorname{Arctan}(3x) + 2x - 1$

$$(1) \text{ بين أن } f \text{ تقابل من } \mathbb{R} \text{ نحو } \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ بين أن المعادلة } f^{-1}(x) = x \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ في } \mathbb{R} \text{ وأن } \alpha \in \left] 0; \frac{1}{3} \right[$$

$$(3) \text{ تحقق أن } \alpha = 1 - \operatorname{Arctan}(3\alpha) \text{ وأن } \alpha \in \left] 1 - \frac{\pi}{4}; \frac{1}{3} \right[$$

$$(4) \text{ بين أن } f^{-1}(x) < x \text{ } (\forall x \in]\alpha; +\infty[) \text{ ثم أول هندسيا النتيجة}$$

$$\text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة بمايلي } \begin{cases} u_0 > \alpha \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

$$1. \text{ بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \alpha$$

$$2. \text{ بين أن } (u_n) \text{ متقاربة محددات نهايتها}$$

تمرين 28: ليكن $x, y, z > 0$ بين أن $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \arctan\left(\frac{1}{z}\right) = \pi$ $\Leftrightarrow xy + yz + zx = 1$