ثانوية الخوارزمي التاهيلية | سلسلة رقم3 | 2011 - 2010

2 بــــــاك ع ف و ح أ | (دراسة الدوال + المتتاليات) | ذ - لحسن كرموس

كلميــــــــــــــم | | http://ad2math.com

تمرين 1 :

نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x)=x-2\sqrt{x}$.

1) حدد D مجموعة التعريف الدالة f و نهايات f عند محدات D .

2) أ – بين أن لكل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

ب- استنتج أن f تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$ وتناقصية قطعا على $[0;1]$.

3) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0;1]$.

أ – بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده .

ب- تحقق من أن لكل x من $I=[0;1]$: $g(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^2-1$

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1;+\infty[$ ب: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

1) أ – تحقق من أن لكل x من $[1;+\infty[$: $f(x)=1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}+1}$.

ب- استنتج أن f تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$.

2) بين أن الدالة f متصلة على $[1;+\infty[$.

3) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

أ – بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 3:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR ب : $f(x)=x^3-3x-3$.

1) أدرس تغيرات الدالة f على IR .

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

أ - بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده.

ب - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $2<\alpha<3$.

ج – بين أن : $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

د – أحسب $\left(g^{-1}\right)(g(2))$ و $g^{-1}(-3)$ و $\left(g^{-1}\right)(\sqrt{3})$.

تمرين 4 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;0]$ ب : $f(x)=x-\sin x$.

1) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;0]$ واستنتج رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

2) استنتج أن : $x\le\sin x$ لكل x من $]-\infty;0]$.

تمرين 5 :

A - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR ب : $g(x)=x^3+x-1$.

1) أ - أدرس تغيرات الدالة g على IR .

ب – بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $0<\alpha<1$

ج – حدد إشارة $g(x)$ على IR .

B – لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR ب :

$$f(x)=x^4+2x^2-4x+1$$

1) بين أن : $f(\alpha)=\alpha^2-3\alpha+1$.

2) أ - تحقق من أن لكل x من IR : $f'(x)=4g(x)$.

ب – حدد إشارة $f'(x)$ على IR .

ج – حدد تغيرات الدالة f على IR.

تمرين 6 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2-x};x\in[0,1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x};x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

1) أدرس اتصال الدالة f في 0 و 1 .

2) أدرس اشتقاق الدالة f في 0 . أول هندسيا النتيجة .

3) أ – تحقق من أن لكل x من $[0,1[$:

$$f(x)-1=\frac{(x-1)(x+2)}{2-x}$$

ب – بين أن لكل x من $]1,+\infty[$:

$$f(x)-1=(x-1)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}\right)$$

ج – استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 وغير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 . أول هندسيا النتيجتين .

تمرين 7 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR ب :

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}-x^2$$

ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أ – أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. أول هندسيا النتيجتين .

بين أن لكل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}$

ب – استنتج أن المستقيم $y=\dfrac{1}{2}$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

2) أ – أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$. أول هندسيا النتيجة .

ب – بين أن : $f'(x)=-\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(3\sqrt[3]{x}+1\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}$ لكل x من IR_+^* .

ج – أعط جدول تغيرات الدالة f .

3) أ – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1;+\infty[$

ب – بين أن α يحقق : $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$ ثم استنتج قيمة α .

4) أرسم المنحنى (C) . ($\alpha\approx4.2$) .

5) بين أنه اذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث : $0<a<\alpha<b$

فان : $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$.

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

أ – بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده .

ب – أرسم في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} .

ج – ضع جدول تغيرات الدالة g^{-1} .