سلسلة رقم 11
حساب التكاملات

2010-2011
ذ . لحسن كرموس

التمرين الأول :

أحسب مايلي :

$\int_0^{\ln 2}(x+e^{-x})dx$ و $\int_0^1 xe^{1-x^2}dx$ و $\int_0^1(3x-4)^3dx$

$\int_0^{-2}(4x^3-5)dx$ و $\int_0^{\ln 2}\left(\frac{2}{x-1}+e^x\right)dx$ و $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$

$\int_0^1\frac{e^x+1}{\sqrt{e^x+x}}dx$ و $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{\left(1-e^x\right)^2}dx$ و $\int_0^{\ln 2}e^{\frac{x}{2}}dx$

$\int_e^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ و $\int_0^{\ln 2}(x+e^{-x})dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

$\int_1^2\frac{x^3+x^2-1}{x^4}dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan x dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x.(\cos x)^3dx$

$\int_0^2|x-1|dx$ و $\int_{-\ln 2}^{\ln 3}\left|e^x-1\right|dx$ و $\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

التمرين الثاني :

نضع : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+2}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ و $h(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

1) بين أن : $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}-\frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}}$ و $g(x)=2+\frac{1}{x-1}$

و $h(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

2) أحسب : $\int_0^{\ln 2}f(x)dx$ و $\int_{-1}^0 g(x)dx$ و $\int_5^{10}h(x)dx$

التمرين الثالث :

A) نضع : $I=\int_0^1\frac{2x^2}{2+x^3}dx$ $J=\int_0^1\frac{x^5}{2+x^3}dx$

1 – أحسب I و $I+J$

2 - استنتج قيمة J

B) نضع : $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}dx$ $B=\int_0^1\frac{1}{1-\sin t}dx$

1 – أحسب $A+B$ و $A-B$

2 – استنتج قيمتي العددين A و B

C) نضع : $f(x)=(1-x)e^x$

1 – بين أن : $f''(x)+-2f'(x)+f(x)=0$

2 – أحسب التكامل $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين الرابع :

A) باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب مايلي :

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos 2xdx$ و $\int_0^{\pi}(x-1)\sin xdx$ و $\int_1^2\ln(x+2)dx$

$\int_0^{-1}xe^{2x+1}dx$ و $\int_1^e(2x-1)\ln xdx$ و $\int_0^{\ln 2}(x^2+1)e^{2x}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx$

B) نضع : $u(x)=\frac{1}{x^2+1}$

أ – أحسب $u'(x)$

ب – بين أن : $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$

ج - باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\int_{\sqrt{e}}^e\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

التمرين الخامس :

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$. أحسب حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f على القطعة $[a,b]$ حول محور الأفاصيل في الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{e^{x-1}}$ و $a=0$ و $b=1$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و $a=1$ و $b=e$

3) $f(x)=\sqrt{\sin x}.\cos x$ و $a=\frac{\pi}{3}$ و $b=\frac{\pi}{2}$

التمرين السادس :

A) حدد مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f ومحور الأفاصيل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ في الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$ و $a=1$ و $b=e$

2) $f(x)=x+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و $a=0$ و $b=\ln 2$

3) $\begin{cases} f(x)=e^x; x\geq 0 \\ f(x)=\sqrt[3]{1-x}; x<0 \end{cases}$ و $a=-1$ و $b=\ln 3$

B) حدد مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f والمستقيمات $y=x$ و $x=a$ و $x=b$ في الحالات التالية :

1) $f(x)=x+\ln(1+x)$ و $a=0$ و $b=1$

(لاحظ أن : $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$)

2) $f(x)=x+1-e^x$ و $a=-\ln 2$ و $b=\ln 3$

التمرين السابع :

نضع : $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$ $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right):$

1) بين أن : $\frac{1}{x+1}\leq f(x)\leq\frac{e}{x+1}$: $\left(\forall x\in[0,1]\right)$

2) استنتج تاطيرا للعدد $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين العاشر:

نضع لكل n من IN : $I_n=\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$ و $I_0=\int_1^e x^2 dx$

1) أحسب I_0

2) باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب I_2

3) بين أن : $(\forall n\in IN^*) : I_{n+1}-I_n=\int_1^e (\ln x-1)x^2(\ln x)^2 dx$

4) أ - بين أن : $(\forall n\in IN) : I_n\geq 0$

ب - استنتج أن المتتالية (I_n) تناقصية

ج – استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة

5) أ - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall n\in IN) : 3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$

ب – أحسب I_1 و I_3