مبادئ في المنطق

الجزء الأول:

التمرين 1: p و q عبارتين منطقيتين.

1) بين أن هناك 16 رابطا منطقيا بين العبارتين p و q.

2) n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2، حدد بدلالة n عدد الروابط المنطقية بين n عبارة.

التمرين 2: أكتب العبارات التالية باستعمال المكممات المنطقية:

A: "لكل عدد صحيح طبيعي n العدد n^2 عدد صحيح طبيعي."

B: "لكل عدد حقيقي x العدد x^2+1 أكبر قطعا من 0."

C: "كل عدد حقيقي، مربعه أكبر من 0."

D: "لكل عدد جذري x يوجد عدد صحيح طبيعي n بحيث العدد nx عدد صحيح نسبي."

E: "لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n، يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد m بحيث $n + m = 3$."

التمرين 3: لتكن p و q و r عبارات منطقية، هل العبارات التالية قوانين منطقية:

1) $\overline{p} \vee \overline{q} \Leftrightarrow \overline{(p \wedge q)}$

2) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

3) $\overline{(p \Leftrightarrow q)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{p} \Leftrightarrow q)}$

4) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

5) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

6) $(p \Rightarrow (q \vee \overline{r})) \Leftrightarrow (q \vee (p \Rightarrow r))$

التمرين 4: لتكن p و q و r عبارات منطقية ،حدد نفي العبارات التالية:

1) $(p \wedge q) \vee r$

2) $(p \Rightarrow \overline{q}) \vee \overline{r}$

3) $(\overline{p} \Rightarrow q) \wedge r$

4) $(p \Leftrightarrow q)$

5) $(p \vee q) \vee \overline{r}$

التمرين 5: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات التالية، ثم حدد نفيها:

1) $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \leq x$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y = 5$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}); x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$

4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y \in \mathbb{Q}$

5) $(\exists x \in \mathbb{R}); 0 \leq x < 1$

6) $(\forall x \in \mathbb{R}); x + 4 \geq 0 \wedge x + 4 < 0$

7) $(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - x + 4 = 0$

8) $(\forall a > 0)(\exists b > 0); |x-1| < b \Rightarrow |2x-3| < a$

9) $\exists (a;b;c) \in \mathbb{R}^3; (a \geq 1) \wedge (a + b + c = 2) \wedge (b \leq a \leq c)$

الجزء الثاني:

باستعمال الاستدلال بالمثال المضاد، بين العبارات التالية خاطئة

التمرين 6: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); \dfrac{3xy}{4+y^2} > 1$

التمرين 7: كل عدد فردي و أكبر من 2 هو عدد أولي.

التمرين 8: E مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تقبل القسمة على 4 أو 6.

بين أن العبارة:" كل عنصر من E يقبل القسمة على 24" عبارة خاطئة.

التمرين 9: $(\forall n \in \mathbb{N}); p_n = n^2 - n + 3$

بين أن العبارة p_n عدد أولي ، عبارة خاطئة.

الجزء الثالث: باستعمال الاستدلال بالاستنتاج، بين العبارات التالية:

التمرين 10: $(\forall n \in \mathbb{N})$ (6 يقبل القسمة على n) $\Rightarrow$ (3 و 2 يقبل القسمة على n)

التمرين 11: $(\forall x \in \mathbb{R})(-4 < x \leq 1) \Rightarrow (0 \leq |x| < 4)$

التمرين 12: $(a;x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$، $p : |x| \leq 1$ و $q : |a| \leq 1$ و $r : \left|ax^2 + x - a\right| \leq \frac{5}{4}$ بين أن: $(p \wedge q) \Rightarrow r$

التمرين 13: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ و $\alpha \in \mathbb{R}^*$. بين أن : $|x| < \alpha \wedge |y| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| \langle \alpha$.

الجزء الثالث: باستعمال الاستدلال بالتكافؤات المتتالية، بين العبارات التالية:

التمرين 14: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$، بين أن: $y = 8$ و $x = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2}\right)$.

التمرين 15: $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow$ لـ a و b نفس الإشارة.

التمرين 16: حدد الأعداد الحقيقية x و y و z التي تحقق: $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}$.

التمرين 17: $(a+b+ab+1=0) \Leftrightarrow (a=-1$ أو $b=-1)$.

التمرين 18: a و b من $\mathbb{R}^{*+}$، بين أن: $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \sqrt{b+1} - \sqrt{b} \Leftrightarrow b < a$.

الجزء الرابع: باستعمال الاستدلال بالمضاد للعكس، بين العبارات التالية:

التمرين 19: $a \neq b \Rightarrow 2a + 5 \neq 2b + 5$.

التمرين 20: $(\forall k > 0; |x| \leq k) \Rightarrow (x = 0)$.

التمرين 21: $(a \neq -1$ و $b \neq -2) \Rightarrow ab + 2a + b \neq -2$.

التمرين 22: $(xy \neq 1$ و $x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$.

التمرين 23: a من $\mathbb{R} - \{-1\}$، بين : $\left(a \neq -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{a-1}{a+1} \neq -3\right)$.

التمرين 24: $\forall x \in [-1;+\infty[$، $x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$.

التمرين 25: $(x \neq 0$ أو $y \neq 0) \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} \neq 2\right)$.

التمرين 26: $\forall (x;y) \in]1;+\infty[^2$، $x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$.

التمرين 27: $x < y$، $x;y \cap \mathbb{Z} = \varnothing \Rightarrow y - x < 1$.

التمرين 28: $(\forall n \in \mathbb{N})\left[\left(n^2 \in 2\mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(n \in 2\mathbb{N}\right)\right]$.

التمرين 29: $\forall x \in \mathbb{R}; x^3 + x + 1 = 0 \Rightarrow -1 < x < -\frac{1}{2}$.

التمرين 30: $\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}_+^3$ و $x > z$ بين أن: $x^2 - y \neq z^2 \Rightarrow \sqrt{x + \sqrt{y}} \neq \sqrt{\frac{x+z}{2}} + \sqrt{\frac{x-z}{2}}$.

التمرين 31: $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+2}$، بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)[x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$.

الجزء الخامس: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات، بين العبارات التالية:

التمرين 32: بين أن n^2+n عدد زوجي، $(\forall n \in \mathbb{N})$.

التمرين 33: بين أن $n(1+n)(2+n)$ يقبل القسمة على 6، $(\forall n \in \mathbb{N})$.

التمرين 34: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $|x-1|+|x|-1=0$.

التمرين 35:

a. برهن أن: $\left[\frac{(n+1)^2}{3}\right]=\left[\frac{2(n+1)}{3}\right]+\left[\frac{n^2}{3}\right]$.

b. استنتج أن: $\left[\frac{n^2}{3}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2k}{3}\right]$.

التمرين 36: بين أن $\frac{n(n-1)(1+n)}{3} \in \mathbb{N}$ ، $(\forall n \in \mathbb{N})$.

التمرين 37: بين أن $\frac{n^2+1}{3} \notin \mathbb{N}$ ، $(\forall n \in \mathbb{N})$.

التمرين 38: x و y و z أعداد حقيقية، أحدها موجب قطعا و الثاني سالب قطعا و الثالث منعدم و تحقق:

$$(x=0 \Rightarrow y>0) \wedge (x>0 \Rightarrow y<0) \wedge (y \neq 0 \Rightarrow z>0)$$

حدد من بين هذه الأعداد الموجب و السالب و المنعدم.

التمرين 39: $f(x)=\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$

بين أن: $\forall x \in]0,+\infty[; 0 \leq f(x) < 1$.

التمرين 40: n عدد صحيح طبيعي لا يقبل القسمة على 3

بين أن: n^2-1 يقبل القسمة على 3.

التمرين 41: بين أنه لكل a و b من $\mathbb{N}$،

فإن: $ab(a^2-b^2)$ يقبل القسمة على 3.

التمرين 42: x و y من $\mathbb{Z}$.

برهن أن: $y=\left[\frac{y-x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+y}{2}\right]$.

التمرين 43: x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة تحقق:

- لـ xz و yz نفس الإشارة.
- لـ x و xyz إشارتان مختلفتان.
- لـ x و yz إشارتان مختلفتان.

حدد إشارة كل عدد من الأعداد x و y و z.

الجزء السادس: باستعمال الاستدلال بالخلف، بين العبارات التالية:

التمرين 44: (d) و(d') مستقيمان متوزيان قطعا، و (d'') مستقيم ثالث يقطع المستقيم (d).

بين أن : (d'') و (d') متقاطعان.

التمرين 45: n و p من $\mathbb{N}^*$ ، بين أنه إذا كان p يقسم n، فإن p لا يقسم (n+1).

التمرين 46: إذا كان p فإن p^2 زوجي ، لكل p من $\mathbb{N}$.

التمرين 47: ليكن x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث: $xyz > 1$ و $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

a. بين أن كل الأعداد x و y و z تخالف 1.

b. بين أن أحد الأعداد x و y و z أصغر قطعا من 1.

التمرين 48: ليكن $a \in \mathbb{R}^*$ بحيث $(\forall \varepsilon > 0)$ لدينا $a < \varepsilon$. بين أن: $a = 0$.

التمرين 49: ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a - \frac{1}{n} \leq b \leq a + \frac{1}{n}$ ، $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. بين أن: $a = b$.

التمرين 50: برهن أن: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

التمرين 51: برهن أن: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

التمرين 52: برهن أن: $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ ثم استنتج أن: $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \notin \mathbb{Q}$.

التمرين 53: ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $(\forall x \in \mathbb{R})(a < x \Rightarrow b \leq x)$ ، بين أن: $a \geq b$.

التمرين 54: نعتبر مستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (D).
A و B نقطتان مختلفتان من المستوى (P)، و C نقطة من المستوى (Q) لا تنتمي إلى المستقيم (D).
بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

التمرين 55: نعتبر المجموعة $A = \{1;2;3;...;n\}$ ، حيث n عدد صحيح طبيعي فردي، x_1 و x_2 و x_3 و.. و x_n ، n عنصر من المجموعة A مختلفة مثنى مثنى.
بين أنه يوجد k من A بحيث $(k - x_k)$ عدد زوجي.

التمرين 56: بين أن المجال $]0;1]$ من $\mathbb{R}$ لا يقبل أصغر عنصر.

الجزء السابع: باستعمال الاستدلال بالترجع، بين أن العبارات التالية:

التمرين 57: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ بين أن: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

التمرين 58: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ بين أن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

التمرين 59: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ بين أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

التمرين 60: $(\forall n \in \mathbb{N})$ و $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ ، بين أن: $(1+a)^n \geq 1 + na$.

التمرين 61: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ، بين أن $3^{2n} - 2^n$ يقبل القسمة على 7.

التمرين 62: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ، بين أن $3^{2n} + 2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11.

التمرين 63: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ، بين أن: $2^n > n + 1$.

التمرين 64: ، بين أن: $2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}}_{\text{(n+1) fois le racine de 2}}$ (ملاحظة: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$)