L'ordre dans IR

Exercice 1: comparer les nombres a et b dans chacun des cas suivants:

1. $a=2\sqrt{3}$;; $b=\sqrt{7}$
2. $a= 2\sqrt{5}$;; $b=3\sqrt{2}$
3. $a=7\sqrt{3}$;; $b=120$
4. $a=-\sqrt{32}$;; $b=-\sqrt{35}$
5. $b =1 + \sqrt{10}$;; $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$
6. $a= -5\sqrt{3}$;; $b=-7\sqrt{2}$
7. $a= -5\sqrt{3} +\sqrt{11}$;; $b=\sqrt{11} - 7\sqrt{2}$
8. $b = \sqrt{\frac{142}{3}}$;; $a=\sqrt{\frac{143}{4}}$
9. $a = 2\sqrt{8} + \sqrt{12}$ و $b =\sqrt{27} + \sqrt{12}$
10. $a = \frac{3}{\sqrt{11}}$;; $b = \frac{11}{2\sqrt{5}}$
11. $a = 3 + \sqrt{2}$;; $b = \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$
12. $a = \sqrt{3 + \frac{3}{5}}$;; $b = \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{5}}$
13. $a = 2^{2010}$;; $b = 3^{1431}$

Exercice 2 : simplifier les expressions suivantes :

$|\sqrt{3}-2|$;; $|-\sqrt{5}-1|$;; $|3-\sqrt{8}|$;; $|5{,}1-\sqrt{19}|$

$\sqrt{(9\sqrt{7} - 10\sqrt{3})^2}$;; $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}$;; $|2\sqrt{3} - 5|$

$\sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$;; $\sqrt{(3\sqrt{7} - 8)^2}$

$\sqrt{(7\sqrt{5} - 11\sqrt{2})^2}$;; $|-x^2 + 6x - 9|$ avec $x \in IR$.

Exercice 3: dans cet exercice x et y des nombres réels strictement positifs,

1. montrer que : $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
2. montrer que : $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$
3. montrer que : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$
4. Comparer $x + y$ et $2\sqrt{xy}$
5. Comparer $x^2 + \frac{1}{x^2}$ et 2.
6. Si $x \leq y$, montrer que $\frac{x}{y+1} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x+1}{y+1}$
7. Montrer que $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$
8. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x + y}$

Exercice 4 : déterminer un ordre croissant des nombres de chaque question :

a) 2^{125} ; 3^{75} ; 5^{50}
b) 2^{100} ; 3^{75} ; 5^{50}

Exercice 5 : soient a et b deux réels strictement négatifs vérifiant $a \neq b$,

Comparer les nombres $\frac{a}{b} - 1$ et $1 - \frac{b}{a}$.

Exercice 6 : n est un nombre entier naturel non nul,

Montrer que : $\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \geq \frac{1}{n}$

Exercice 7 :

1. Montrer que $x \in IR_+^*$: $1 + x \geq 2\sqrt{x}$.
2. Déduire que pour les nombres réels strictement positifs x_i tel que $i \in \{1, 2, 3, .., n\}$ et n de IN^* :

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)..(1+x_n) \geq 2^n \sqrt{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$$

Exercice 8 : on pose : $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{99}{100}$ et $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \ldots \times \frac{98}{99}$.

1. Montrer que $A < B$.
2. Déduire que : $A < \frac{1}{10} < B$

Exercice 9 : soient x et y deux réels strictement positifs, tels que : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

1. Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$ et aussi $\frac{1}{xy} \geq 16$.
2. Déduire que : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 25$.

Exercice 10 : montrer que pour tout réel x, on a :

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > \frac{1}{2}$$

Exercice 11 : représenter chacun des intervalles suivants sur une droite graduée :

$[-2;2]$;; $[3;4,5]$;; $[-2,5;-1[$;; $]0;3]$;; $]-4;1[$;; $]-\infty;1]$;; $[-1;+\infty[$

Exercice 12 : déterminer :

$[-2;2] \cap [-1;3,5]$;; $[-2,5;1[\cap]0;3]$;; $]-4;1[\cap]-\infty;1]$

$[-2;2] \cup [-1;+\infty[$;; $[-2,5;1[\cup]0;3]$;; $]-4;2[\cap]-\infty;-1]$

Exercice 13 :

a un réel vérifiant $-7 > 3a - 4 > -8{,}5$.

1. Déterminer un encadrement du nombre .
2. On pose $b = \frac{3a-4}{a^2}$, donner un encadrement de b .

Exercice 14 : soient a et b deux réels tels que $-2 \leq a \leq 3$ et $-1 \leq b \leq 4$,

1. montrer que :
$$-41 \leq a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1 \leq 24$$
2. soit $x \in IR_+^*$, comparer les nombres $\frac{1}{2x}$ et $\sqrt{x^2 + 1} - x$.

Exercice 15 : soit x un nombre réel, tel que $|x\text{-}1| \leq \frac{1}{2}$.

1. Quelle est la valeur approchée du réel x a 5×10^{-1} prés ?
2. Montrer que $\frac{4}{3}$ est la valeur approchée de $\frac{1}{x}$ a $\frac{2}{3}$ prés.

Exercice 16 : x, y et z des nombres reels tels que : $1 \leq x \leq 4$; $-6 \leq y \leq -2$ et $-4 \leq z \leq 3$.

1. Déterminer un encadrement pour: x^2 ; y^2 ; z^2 et xy .
2. Determiner une approximation de x à la precision $\frac{3}{2}$.

Exercice 17 : soit x un réel tel que $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et on pose $a = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Determiner les valeurs approchées par défaut et par excés de a à une amplitude de $\frac{3}{10}$.
2. Donner une approximation de a à $\frac{3}{20}$ prés.

Exercice 18 : soient x et y deux reels tells que: $\left|2x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et $\left|y - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$.

1. Montrer que x et y sont deux elements de l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
2. Vérifier que : $xy - 3x - 2y - 1 = (x-2)(y-3) - 7$
3. puis déduire que : $-5 < xy - 3x - 2y - 1 < -\frac{13}{4}$.

Exercice 19 : soit x un réel tel que $2 < x < 3$ et $\alpha = x^2 - 5x + 6$.

1. Encadrer le nombre α .
2. Vérifier que $\alpha = (x-2)(x-3)$ puis encadrer α de nouveau.
3. Montrer que $\alpha = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, puis donner un nouveau encadrement de α .

Exercice 20 : On pose $A = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ avec un nombre réel a non nul.

1. Montrer que : $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} - \frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}+1}$.
2.
   a. Montrer que $\sqrt{1+a^2} + 1 \geq 2$.
   b. Déduire que $\left|A - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{1}{2}|a|$.
3. Donner une approximation de $\frac{\sqrt{1,0001}}{0,01}$ à 5×10^{-3} prés.

Exercice 21 : soit x de $\mathbb{R}$, on pose $A = \sqrt{x^2+1} - |x|$ et $B = \sqrt{x^2+1} + |x|$.

1.
   a. Montrer que $A > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   b. Déduire que pour tout réel x, $B > 2|x|$.
2.
   a. Vérifier que $A \times B = 1$ pour tout réel x .
   b. déduire que pour x de $\mathbb{R}^*$, $0 < A < \frac{1}{2|x|}$ puis $|x| < \sqrt{x^2+1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$.
3. Encadrer le nombre $\frac{\sqrt{122}}{3}$ avec une amplitude de $\frac{1}{66}$.