Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Exercice 1: $n \in \mathbb{N}$, *compléter par* $\notin$ *ou* $\in$:

$2 \ldots \mathbb{N}$;; $4{,}1 \ldots \mathbb{Z}$;; $\frac{-2}{5} \ldots \mathbb{Q}$;; $\frac{1}{12} \ldots \mathbb{D}$;; $\sqrt{97} \ldots \mathbb{R}^-$;; $0 \ldots \mathbb{Z}^*$;; $5{,}33 \ldots \mathbb{D}$;; $5{,}33 \ldots \mathbb{Q}$

$0 \ldots \mathbb{N}$;; $433 \ldots \mathbb{Z}_+^*$;; $-301 \ldots \mathbb{Q}^+$;; $-\frac{17}{2} \ldots \mathbb{D}^+$;; $-\sqrt{7} \ldots \mathbb{R}^-$;; $\frac{n(n+1)}{2} \ldots \mathbb{N}$;; $\sqrt{16}+2\sqrt{9} \ldots \mathbb{Q}$

Exercice 2: *compléter par* $\subset$ *ou* $\not\subset$:

$IN \ldots \mathbb{Z}$;; $IN \ldots IR$;; $IN \ldots Q^-$;; $\{1;3\} \ldots \mathbb{Z}$;; $\{-1\} \ldots \mathbb{Z}^+$;; $\{0,2;3\} \ldots \mathbb{Z}$;; $IR \ldots IR^+$

$\mathbb{Z}^- \ldots \mathbb{Z}^*$;; $ID \ldots Q$;; $IN \ldots IR^*$;; $IN \ldots Q$;; $IN^* \ldots \mathbb{Z}^*$;; $IN \ldots \mathbb{Z}^+$;; $IR \ldots \mathbb{Z}$;; $IN \ldots ID_+^*$

Exercice 3: *Déterminer en extention les ensembles suivants :*

$IN \cap \mathbb{Z}$;; $IN \cap IR$;; $IN \cap Q^-$;; $\{1;3\} \cap \mathbb{Z}$;; $\{-1\} \cap \mathbb{Z}^+$;; $\{0,2;3\} \cap \mathbb{Z}$;; $IR \cap IR^+$

$\mathbb{Z}^- \cap \mathbb{Z}^*$;; $ID \cap Q$;; $IN \cap IR^*$;; $IN \cap Q$;; $IN^* \cap \mathbb{Z}^*$;; $IN \cap \mathbb{Z}^+$;; $IR \cap \mathbb{Z}$;; $IN \cap ID_+^*$

$IN \cap \mathbb{Z}$;; $IN \cup IR$;; $IN \cup Q^*$;; $\{1;3\} \cup \mathbb{Z}$;; $\{-1\} \cup \{1;3;4\}$;; $\{0,2;3\} \cup \mathbb{Z}$;; $IR \cup IR^+$

Exercice 4: *calculer :*

$$G = \sqrt{2-\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\right) - \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$H = \sqrt{9-\sqrt{17}} - \sqrt{9+\sqrt{17}}$$

$$I = \left(\sqrt{51+36\sqrt{2}}\right)^{-1} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$J = \sqrt{2\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} + 5\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}$$

$$E = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{3}{22}+\frac{11}{44}} \qquad C = \frac{1+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \qquad A = \frac{\frac{3}{4}-5}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$$

$$F = \frac{1+\frac{1}{3}}{2+\frac{1+\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}}} \qquad D = \frac{2}{7} \times \frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} \qquad B = \frac{3+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+5}$$

Exercice 5: *a est un nombre réel strictement positif tel que :* $a + \frac{1}{a} = \sqrt{7}$

1. *Calculer* $a^2 + \frac{1}{a^2}$.
2. *Déduire la valeur de* $a^4 + \frac{1}{a^4}$.
3. *Déterminer la valeur de* $a^3 + \frac{1}{a^3}$.

Exercice 6: *a et b deux entiers relatifs et* $Z = \left(a^2+2ab+b^2+a+b+1\right)^2$.

Donner une écriture de Z sous forme d'une somme de trois carrés parfaits.

Exercice 7: *soit* $X = \sqrt{\frac{12+\sqrt{23}}{2}} - \sqrt{\frac{12-\sqrt{23}}{2}}$, *Montrer que :* $X = \sqrt{\frac{13}{2}}$

Exercice 8: *a, b et c sont des nombres réels non nuls tels que* $a + \frac{1}{b} = 1$ *et* $b + \frac{1}{c} = 1$.

Calculer le produit abc.

Exercice 9: *Montrer que :* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 10: *Montrer que :* $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 11: *a et b sont deux nombres réels strictement positifs, tels que* $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ *et* $a^2 + b^2 = 52$.

Déterminer les valeurs de a et de b.

Exercice 12: *un nombreentier naturel x est dit Pytagorcien s'ils existent deux entiers naturels a et b tels que* $x = a^2 + b^2$.

Montrer que si x et y sont des nombres Pytagorciens alors de même pour xy.

Exercice 13: *a et b sont deux nombres réels non nuls vérifiant :* $a^2 = b$ *et* $b^2 = 2$.

Calculer $(ab)^2 \times b$ *et* $\frac{1}{a^2} \times \left(\frac{a}{b}\right)^6$.

Exercice 14*: a, b et c des nombres réels non nuls tels que :* $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 4$ *et* $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 5$.

Calculer $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$

Exercice 15: *a, b et c des nombres réels non nuls tels que :* $ab + bc + ca = abc$.

Calculer $\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca}$

Exercice 16:*soient x, y et z trois nombres réels.*

On pose : $E = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

Factoriser E en produit de trois facteurs.