

# الاستعداد لأولمبياد الرياضيات

## الثالثة إعدادي

إعدادية معاذ بن جبل - سوق أربعاء الغرب

مديرية القنيطرة

من اعداد الأستاذ : سعيد البداري

الموسم الدراسي : 2017 / 2018

تمرين 1

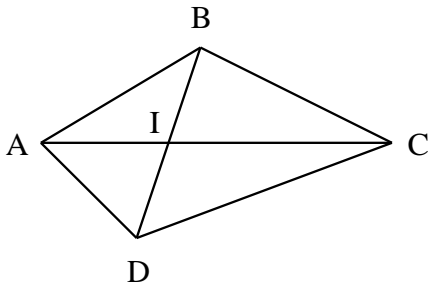
(1)  $k$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم. أثبت أن  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

(2) استنتج قيمة العدد  $A$  حيث:  $A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$

تمرين 2

حدد قيمة العدد الصحيح  $n$  بحيث يكون:  $\frac{9^{n-2} \times 3^{2n+2}}{27^{n+3}} = 81$

تمرين 3



ABCD رباعي محدب حيث المثلثين ABC و ADC لهما نفس المساحة. النقطة I هي تقاطع القطرين [AC] و [BD].  
بين أن النقطة I هي منتصف القطعة [BD].

تمرين 4

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث  $x \geq 0$  و  $x + y = 0$ . أحسب  $x$  و  $y$  إذا علمت أن  $x^4 \times y^6 = 2^{10}$ .

تمرين 5

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان  $a + b = 1$  و  $a^2 + b^2 = 2$ . أحسب  $a^4 + b^4$ .

تمرين 6

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان غير منعدمين حيث:  $2x^2 + 2y^2 = 5xy$ . أحسب  $\frac{x+y}{x-y}$ .

تمرين 7

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان قطعاً و مختلفان. حدد إشارة العدد  $X = \frac{a-b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

تمرين 8

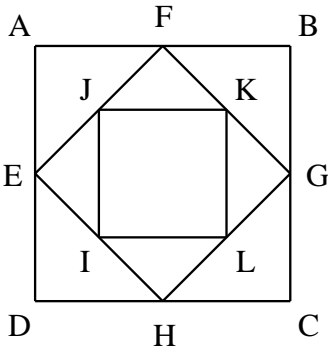
ABC مثلث متساوي الساقين في A. النقطتان D و E تنتميان على التوالي إلى القطعتين [BC] و [AC] بحيث  $BAD = 30^\circ$  و  $AD = AE$ . أحسب قياس الزاوية [EDC].

تمرين 9

(1)  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان غير منعدمين. بين أن  $\frac{a \times b}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$

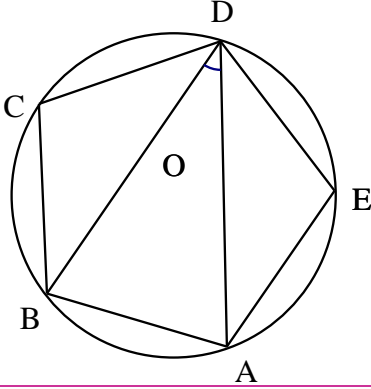
(2)  $x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية غير منعدمة. بين أن  $\frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{yz}{y^2 + z^2} + \frac{zx}{z^2 + x^2} \leq \frac{1}{2}$

تمرين 10



ABCD مربع و E و F و G و H منتصفات [DA] و [AB] و [BC] و [CD] على التوالي. النقط I و J و K و L منتصفات [HE] و [EF] و [FG] و [GH] على التوالي.  
أحسب نسبة مساحتي المربعين ABCD و IJKL في هذا الترتيب.

تمرين 11



ABCDE مضلع خماسي منتظم. و O مركز الدائرة المحيطة به.  
احسب قياس الزاوية [ADB]

تمرين 12

مثلث و S نقطة من الضلع [TL]. الموازي للمستقيم (SE) والمار من T يقطع (LE) في H. الموازي للمستقيم (SE) و L يقطع (ET) في A. بين أن  $\frac{1}{TH} + \frac{1}{AL} = \frac{1}{ES}$ .

تمرين 13

$$\text{حل المعادلة التالية: } \sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 7$$

تمرين 14

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ حل النظام التالية}$$

تمرين 15

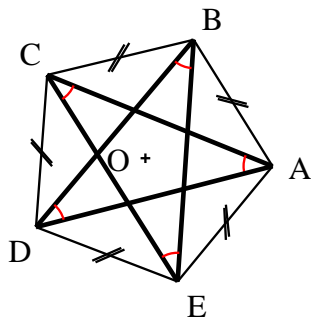
$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث } xy = -1 \text{ و } x + y = \frac{3}{2}$$

$$\text{أحسب } x^3 + y^3. \text{ [ يمكن استعمال المتطابقة: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ ]}$$

تمرين 16

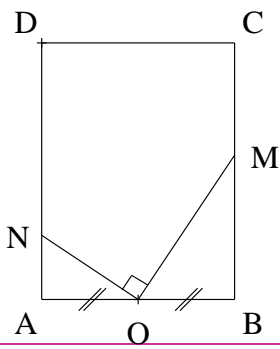
نقول إن عددا حقيقيا هو عدد فيثاغورسي (نسبة إلى فيثاغورس) إذا كان ممكنا كتابته على شكل مجموع مربعين كاملين.  
[ مثال:  $5 = 1^2 + 2^2$  ]. أثبت أن جداء عددين فيثاغوريين هو عدد فيثاغوري.

تمرين 17



ما هو قياس زوايا النجمة الخماسية؟  
للبرهنة استعن بالشكل المرافق لنص المسألة واحسب قياس إحدى الزوايا الخمس المطلوبة، مثلا [BEC].

تمرين 18



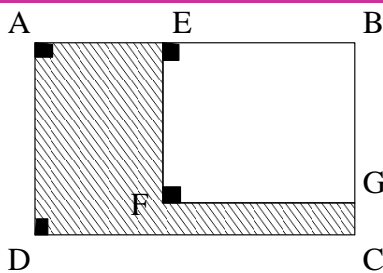
ABCD مستطيل بحيث  $AB = 2a$  و  $O$  منتصف  $[AB]$ .  
 و  $M$  و  $N$  نقطتان من  $[BC]$  و  $[AD]$  على التوالي بحيث  $(OM) \perp (ON)$ .  
 أحسب  $BM \times AN$  بدلالة  $a$ .

تمرين 19

حل المعادلة:  $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$

تمرين 20 بسط العدد:  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$

تمرين 21



ABCD مستطيل طوله  $AB = 10m$  و  $AD = 7m$ .  
 نقسمه إلى بقعتين بنفس المساحة، مساحة  $AEFGCD$ .  
 أحسب  $AE$  إذا علمت  $GC = 1m$ .

تمرين 22

ABC مثلث متساوي الساقين في A بحيث  $AB = a$ . المتوسطان  $[BB']$  و  $[CC']$  يتقاطعان في نقطة E.  
 أحسب مساحة المثلث BEC بدلالة  $a$ .

تمرين 23

(1) نضع  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . تحقق أن:  $\frac{1}{\alpha} = \alpha - 1$  و أن  $\alpha^2 = 1 + \alpha$ .

(2) أحسب  $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$

تمرين 24

(1)  $n$  عدد صحيح طبيعي. بين أن  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(2) استنتج قيمة العدد:  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$

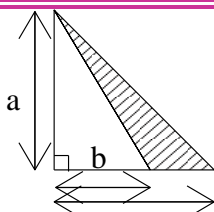
تمرين 25

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث  $2AB = AC = 2$ . لتكن M نقطة من  $[BC]$  بحيث  $BM = AB$  و N نقطة من  $[AC]$  بحيث  $CM = CN$ . أحسب  $\frac{AC}{NC}$ .

تمرين 26

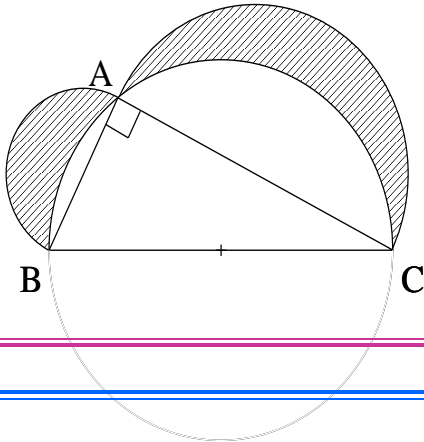
أحسب:  $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1989 - 1990$

$P = \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{2}{9}\right) \left(1 - \frac{3}{9}\right) \times \dots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$



تمرين 27

أحسب مساحة الجزء المخدش بدلالة a و b. ( بطريقتين مختلفتين )



تمرين 28

إذا علمت أن مساحة المثلث ABC القائم الزاوية في A هي 1 فاحسب مساحة الجزء المخدش.

تمرين 29

a عدد صحيح طبيعي غير منعدم. أكتب  $2a^2 + 2$  على شكل مجموع مربعين كاملين و طبق ذلك على العدد 202.

تمرين 30

$$\text{حل المعادلة: } \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 1$$

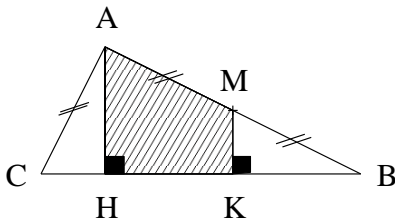
تمرين 31

$$\text{بين أن } \frac{1}{2} < \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} < \frac{9}{10}$$

تمرين 32

نضع:  $a = 100(1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99)$  و  $b = 99(1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100)$  قارن العددين a و b.

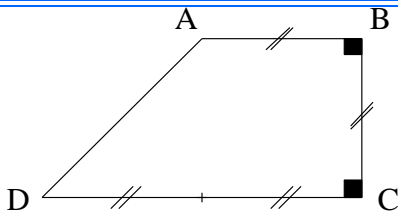
تمرين 33



ABC مثلث قائم الزاوية في A و النقطة M منتصف [AB]. نعطي  $AB = 1$  و  $AC = 2$ . النقطتان H و K هما على التوالي مسقطا A و M عموديا على (BC). أحسب مساحة الرباعي AHKM.

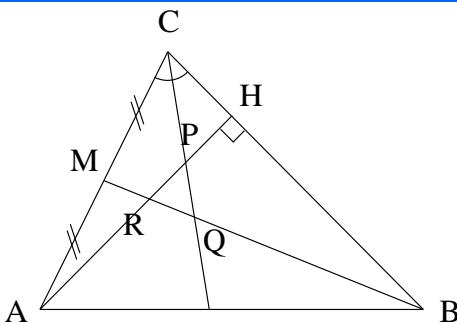
تمرين 34

ABCD شبه منحرف قائم بحيث طول قاعدته الكبرى هو ضعف قاعدته الصغرى و ارتفاعه يساوي طول القاعدة الصغرى. كيف يمكن تقسيم ABCD إلى أربعة أشباه منحرف لها نفس المساحة.



تمرين 35

ABC مثلث زواياه كلها حادة. ليكن (BM) متوسط هذا المثلث المار من B و (AH) ارتفاعه المار من A و (CL) منصف الزاوية [ACB]. هذه المستقيمات تحدد مثلثا PQR. بين أنه إذا كان PQR متساوي الأضلاع فإن ABC متساوي الأضلاع أيضا. ماذا يمكن القول في هذه الحالة عن النقط P و Q و R؟



تمرين 36

(1) أحسب العدد:  $2006^2$ .

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4024036}+\sqrt{4024035}}$$

(2) استنتج حساب العدد:

تمرين 37

ABC مثلث زواياه جميعها حادة. ولتكن H مركز تعامده و S مساحته.

$$S = \frac{1}{4}(AB \times CH + BC \times AH + AC \times BH)$$

بين أن:

تمرين 38

a و b و c أعداد حقيقية موجبة و متناسبة على التوالي مع الأعداد الحقيقية الموجبة a' و b' و c'.

$$\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')} = \sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'}$$

بين أن:

تمرين 39

x و y و z أعداد حقيقية موجبة بحيث: xyz = 1.

$$B = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}$$

نضع: B = 1 بين أن

تمرين 40

a و b قياسا زاويتين حادتين و x عدد حقيقي حيث  $x > \frac{3}{2}$ .

$$\sin a = \sqrt{\frac{3x-2}{3x}} \quad \text{و} \quad \tan b = \sqrt{\frac{3x-2}{2}}$$

إذا كان a = b بين أن

تمرين 41

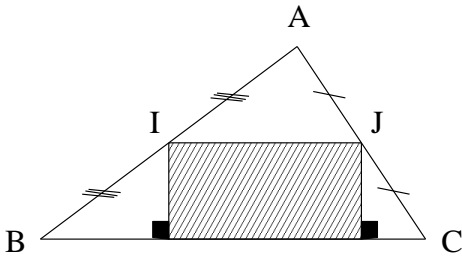
$$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{225}\right)$$

أحسب:

تمرين 42

يصبغ صباغ غرفة واحدة في 12 ساعة. و يصبغ صباغ آخر نفس الغرفة في 15 ساعة. ما هو الوقت الكافي لصبغة نفس الغرفة إذا تعاون الصباغان معا.

تمرين 43



نعتبر الشكل جانبه:

نفترض أن مساحة المثلث ABC هي 10.

ما هي مساحة الجزء المخدش؟

تمرين 44

$$P = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{999}\right) \left(1 - \frac{1}{1000}\right)$$

أحسب:

تمرين 45

حل المعادلة التالية:  $3^x + 3^{x+3} = 756$  (x عدد صحيح نسبي)

تمرين 46

a و b عدنان حقيقيان موجبان بحيث  $a < b$ . نضع  $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$  و  $y = \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}$ .

أحسب  $\frac{1}{y}$  و  $\frac{1}{x}$  ثم استنتج مقارنة للعددين x و y.

تمرين 47

ABC مثلث قائم الزاوية في A. A' و B' نقطتان بحيث C منتصف [AA'] و C منتصف [BB'].

أحسب مساحة المثلث  $AB'A'$  بدلالة مساحة المثلث  $ABC$ .

تمرين 48

$ABCD$  متوازي الأضلاع.

(1) أنشئ النقط  $M$  و  $N$  و  $P$  و  $Q$  بحيث  $\overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AB}$  و  $\overline{BN} = \frac{3}{2}\overline{BC}$  و  $\overline{CP} = \frac{3}{2}\overline{CD}$  و  $\overline{DQ} = \frac{3}{2}\overline{DA}$ .

(2) بين أن  $\overline{MN} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{BC}$ .

(3) بين أن  $MNPQ$  متوازي الأضلاع.

تمرين 49

$x$  و  $y$  عدنان صحيحان طبيعيين بحيث:  $84x = y^2$ .

حدد قيمة كل من  $x$  و  $y$  إذا علمت أن  $x$  هو أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم يحقق العلاقة السابقة.

تمرين 50

تدور عجلة دراجة نارية تسير بسرعة 72 كيلومتر في الساعة 10 دورات في الثانية. ما هو محيط العجلة؟

تمرين 51

يحتوي صندوق على عدد من الأوراق الخضراء و الحمراء. إذا علمت أن نسبة عدد الأوراق الحمراء إلى عدد الأوراق الخضراء

$\frac{5}{9}$  و أن عدد الأوراق بالصندوق محصور قطاعا بين 90 و 110 فما هو عدد الأوراق من كل نوع؟

تمرين 52

$ABC$  مثلث.  $M$  منتصف  $[AC]$  و  $N$  منتصف  $[BM]$ .

بين أن مجموع مساحتي المثلثين  $ABN$  و  $BCN$  يساوي نصف مساحة المثلث  $ABC$ .

تمرين 53

$$\text{بين أن } (2,01212\dots) - (0,9191\dots) = \frac{541}{495}$$

تمرين 54

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية تحقق  $a < c$  و  $b - a = c - b$ .

رتب هذه الأعداد ثم قارن  $b^2 - a^2$  و  $c^2 - b^2$ .

تمرين 55

أحسب وتر مثلث قائم الزاوية إذا علمت أن مربع مجموع طولي الضلعين المتعامدين هو 49 و أن مربع فرقيهما 31.

تمرين 56

من ميناء تنطلق باخرتان إحداهما تنطلق على رأس كل 12 يوما و الأخرى على رأس كل 45 يوما.

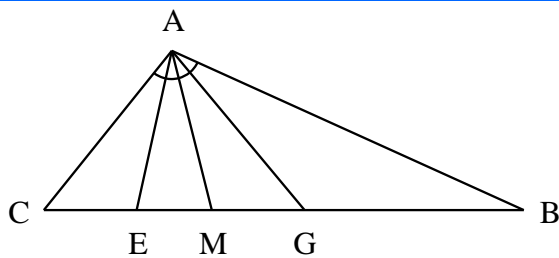
كم من يوم يلزم لتتطلق الباخرتان معا بعد هذا اليوم؟

تمرين 57

$ABC$  مثلث. نجزي الزاوية  $[BAC]$  إلى أربع زوايا

متقايسة. (أنظر الشكل)

$$\text{بين أن } \frac{AB}{AC} \times \frac{AG}{AE} = \frac{BG}{CE}$$



تمرين 58

$$\text{قارن } a \text{ و } 1 - a^2 \text{ علما أن } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < 1$$

تمرين 59

نضع  $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}$  (A جداء 50 من العوامل)

$B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{98}{99}$  (B جداء 49 من العوامل)

(1) تحقق أن  $AB = \frac{1}{100}$  وأن  $A < B$ .

(2) استنتج من ذلك أن  $A < \frac{1}{10} < B$ .

### تمرين 60

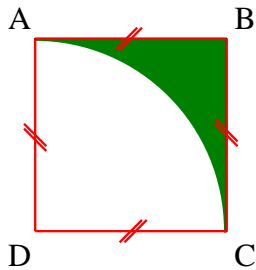
تسعة عمال اشتغلوا ثمانين يوما لإنجاز حائط طوله 120m. كم هو عدد الأيام التي ينبغي أن يشتغلها خمسة عمال لإنجاز جدار مماثل للأول طوله 150m؟

### تمرين 61

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

بين أن  $\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

### تمرين 62



ABCD مربع بحيث  $AB = x\sqrt{2} + \frac{1}{2}$  و x عدد حقيقي موجب

و AC قوس من الدائرة التي مركزها D. حدد مساحة الجزء الملون.

### تمرين 63

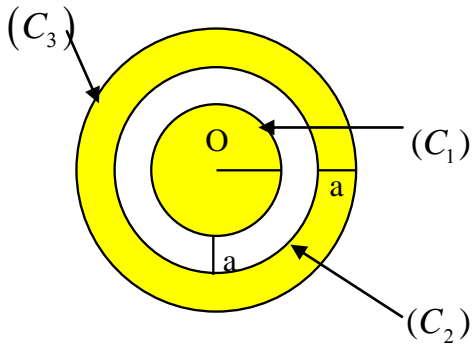
إذا علمت أن  $a + \frac{1}{a} = \sqrt{5}$ . أحسب  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  و  $a^4 + \frac{1}{a^4}$  و  $a^3 + \frac{1}{a^3}$ .

### تمرين 64

a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمين.

بين أن العدد:  $X = (a^2 + 2ab + b^2 + a + b + 1)^2$  يمكن كتابته على شكل مجموع ثلاثة مربعات كاملة غير منعدمة.

### تمرين 65



$(C_1)$  و  $(C_2)$  و  $(C_3)$  دوائر لها نفس المركز O بحيث

شعاع الدائرة  $(C_1)$  هو  $x\sqrt{2}$ .

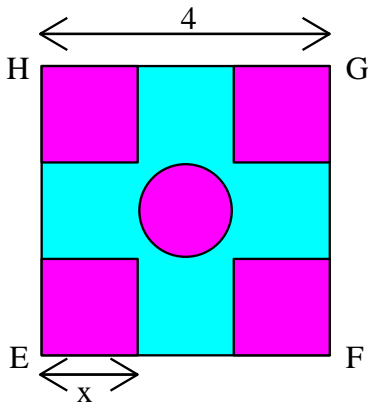
حدد بدلالة x و a مساحة الجزء الملون بالأصفر.

### تمرين 66

a و b و c و a' و b' و c' أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث  $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = 1$  و  $\frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 1$

بين أن  $abc + a'b'c' = 0$

تمرين 67



نعتبر الشكل جانبه.

حدد مساحة الجزء الملون بالأزرق بدلالة  $x$  علما أن

طول قطر الدائرة الملونة هو  $x$ .

تمرين 68

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية.

(1) بين أن  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

(2)  $x$  و  $y$  و  $z$  أطوال أضلاع مثلث بحيث  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ . ما هي طبيعة هذا المثلث؟

تمرين 69

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً.

بين أنه إذا كان  $2b = a + c$  فإن  $\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

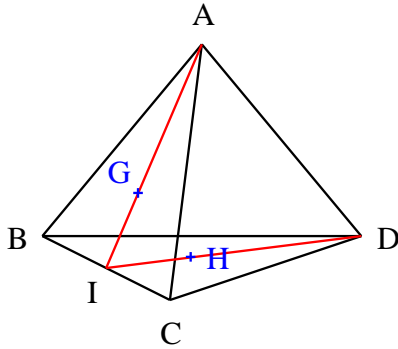
تمرين 70

أوجد جميع الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  التي تحقق  $2a^2 + b^2 + 1 = 2ab - 2a$

تمرين 71

حل المعادلات الآتية:  $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{10} = 0$      $x^2 - x - 1 = 0$      $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) = -1$

تمرين 72



ABCD رباعي أوجه.

G مركز ثقل المثلث ABC.

H مركز ثقل المثلث BCD.

برهن أن المستقيمين (AD) و (GH) متوازيان.

تمرين 73

$a$  و  $b$  عدنان موجبان قطعاً.

(1) بين أن  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$  ثم استنتج أن  $a+b \leq 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(2) استنتج أنه إذا كان  $a+b=1$  فإن  $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$  و  $ab \leq \frac{1}{4}$

(3) استنتج من السؤال ① أنه إذا كان:  $a > 0$  و  $b > 0$  و  $a+b=1$  فإن  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

تمرين 74

$a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً.

بين أن  $1 \leq \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+a+d} + \frac{c}{c+a+d} + \frac{d}{d+c+b} \leq 2$



تمرين 75

x و y و z أعداد حقيقية موجبة.

إذا علمت أن  $\sqrt{y+z} + \sqrt{x} < \sqrt{x+z} + \sqrt{y}$  فبين أن  $x < y$ .

تمرين 76

a و b عدنان موجبان حيث  $a^2 - b^2 = 1$  و n عدد صحيح طبيعي. بين أن  $\left(\frac{1}{a+b}\right)^n + \left(\frac{1}{a-b}\right)^n \geq 2$

تمرين 77

(1) بين أن  $x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$

(2) حل المعادلة  $x^2 - 6x + 7 = 0$

3 استنتج حلول النظام:  
$$\begin{cases} A + B = 6 \\ A^2 + B^2 = 22 \end{cases}$$

تمرين 78

a و b و c و d أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث  $a \neq c$  و  $b \neq d$

بين أن  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$  تعني  $\frac{b^2(d-a)}{b-d} = \frac{a^2(c-b)}{a-c}$

تمرين 79:

a و b و c و x أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث  $abc = 1$

بين أن  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

استنتج أن:  $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$

تمرين 80

نعتبر المعادلة (E)  $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{3} - 1$ . نضع  $U = \sqrt{x^2 + x + 1}$  و  $V = \sqrt{x^2 + x - 1}$

(1) بين أنه إذا كان x حلاً للمعادلة (E) فإن الزوج (U, V) حل للنظمة (S) بحيث:  
(S) 
$$\begin{cases} U + V = \sqrt{3} + 1 \\ U - V = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

(2) حل (S) ثم استنتج حلول المعادلة (E).